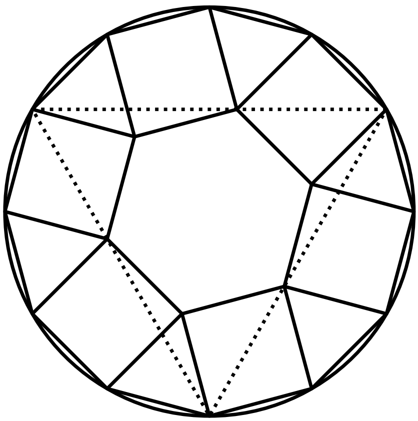
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2023–2024

Úrslitakeppni

Svör og lausnir



Dæmi 1
Finnið allar rauntölur x, y sem uppfylla báðar jöfnurnar

$$x^3 + y^3 = 9 \tag{1.1}$$

og

$$x^2y + xy^2 = 6 \tag{1.2}$$

Lausn
Athugum að

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x^3 + y^3) + 3(x^2y + xy^2). \tag{1.3}$$

Með því nota jöfnur (1.1) og (1.2) þá fæst

$$(x+y)^3 = 9 + 3 \cdot 6 = 27. \tag{1.4}$$

Af þessu sést að

$$x + y = 3 \tag{1.5}$$

Þáttum nú $x + y$ út úr jöfnu (1.2) og notum jöfnu (1.5). Þá fæst

$$6 = x^2y + xy^2 = (x+y)xy = 3xy. \tag{1.6}$$

Þetta þýðir að

$$xy = 2. \tag{1.7}$$

Margföldum nú jöfnu (1.5) í gegn með x. Þá fæst

$$x^2 + xy = 3x. \tag{1.8}$$

Setjum nú inn fyrir xy og fáum annars stigs jöfnuna í breytunni x:

$$x^2 - 3x + 2 = 0. \tag{1.9}$$

Þetta má þátta

$$(x-1)(x-2) = 0. \tag{1.10}$$

Af þessu sést að $x = 1$ eða $x = 2$. Þar sem $x + y = 3$ þá er $(x, y) = (1, 2)$ eða $(x, y) = (2, 1)$. Með innsetningu sést að jöfnur (1.1) og (1.2) gilda báðar ef $(x, y) = (1, 2)$ eða $(x, y) = (2, 1)$. Þetta eru því allar lausnir jöfnuhneppisins. $\square$

Dæmi 2
Jörmunrekur hefur útbúið strimil sem hefur 89 reiti í röð. Á hvern fyrstu 44 reitanna frá vinstri leggur hann einn hvítan stein. Hann leggur svo svartan stein á reitina 44 lengst til hægri. Hann ætlar nú að færa steinana með því að leika eftirfarandi leikjum:

- Færa má hvítan stein til hægri um einn reit ef sá reitur er tómur.
- Færa má svartan stein til vinstri um einn reit ef sá reitur er tómur.
- Víxla má á hvítum og svörtum stein sem eru hlið við hlið ef sá hvíti er vinstra megin.

Það tekur alltaf jafnmarga leiki að komast í stöðu þar sem ekki er hægt að leika lengur. Hvað tekur það marga leiki?

Lausn
Steinn getur aldrei tekið fram úr steini af sama lit, og Jörmunrekur getur alltaf leikið nema þegar allir svörtu steinarnir eru saman til vinstri og hvítu saman til hægri. Látum d vera summu fjarlægða allra steina frá lokastaðsetningu sinni í reitum talið. Hver steinn er 45 reitum frá lokastaðsetningu sinni, $d = 45 \cdot 88$. Þegar við færum einn stein minnkar d um 1. Hvert skipti sem við víxlum tveimur steinum færast báðir steinar einum nær lokastaðsetningu sinni, svo d minnkar um 2 í staðinn. Við sjáum að sérhver hvítur steinn mun víxla við sérhvern svartan stein nákvæmlega einu sinni, svo þetta mun gerast 44^2 sinnum. Leiknum lýkur þegar $d = 0$, svo að fjöldi leikja er d mínus hversu oft summan minnkar um 2. Því er svarið $45 \cdot 88 - 44^2 = 2024$. $\square$

Dæmi 3

Látum $\gcd(a,b)$ tákna stærsta samdeili a og b, þ.e. stærstu jákvæðu heiltöluna sem gengur upp í bæði a og b. Látum $\operatorname{lcm}(a,b)$ tákna minnsta samfeldi a og b, þ.e. minnstu jákvæðu heiltöluna sem bæði a og b ganga upp í. Finnið allar jákvæðar heiltölulausnir á jöfnunni

$$\gcd(a,b) + \operatorname{lcm}(a,b) = a + b. \tag{3.1}$$

Lausn

Fyrir allar náttúrlegar tölur er

$$\gcd(a,b) \cdot \operatorname{lcm}(a,b) = a \cdot b$$

Sjá til dæmis Wikipediu síðuna “Least common multiple“. Stingum því inn í upphaflegu jöfnuna til að losna við lcm og fáum

$$\gcd(a,b) + \frac{ab}{\gcd(a,b)} = a + b$$

Deilum í gegnum jöfnuna okkar með $\gcd(a,b)$ og fáum

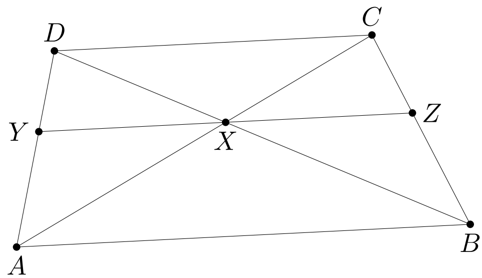
$$1 + \frac{a}{\gcd(a,b)} \cdot \frac{b}{\gcd(a,b)} = \frac{a}{\gcd(a,b)} + \frac{b}{\gcd(a,b)}$$

Þar sem $\gcd(a,b)$ deilir a og b getum við látið $c := a/\gcd(a,b)$ og $d := b/\gcd(a,b)$. Þá verður jafnan einfaldlega $1 + cd = c + d$ sem má endurrita sem $(c-1)(d-1) = 0$. Þar með er lausnin $c = 1$ eða $d = 1$. Þetta þýðir að $a = \gcd(a,b)$ eða að $b = \gcd(a,b)$. Þar með eru lausnirnar sem við fáum öll pör (a,b) þar sem önnur talan er margfeldi af hinni. Sjáum líka með því að stinga þær inn í jöfnuna að öll slík pör eru lausnir. $\square$

Dæmi 4

Látum $ABCD$ vera trapisu þar sem hliðin AB er samsíða hliðinni DC. Látum X vera skurðpunkt hornastrikanna AC og BD. Drögum línuna ℓ gegnum X sem er samsíða AB. Látum Y og Z vera skurðpunkta ℓ við hliðarnir AD og BC, í þessari röð. Látum a vera lengd hliðarinnar AB og b vera lengd hliðarinnar DC. Sýnið að lengd striksins YZ sé $\frac{2ab}{a+b}$.

Lausn



Athugum að þríhyrningarnir $\triangle ADC$ og $\triangle AYX$ eru einslaga, svo til er tala x þannig að

$$|YD| = x\,|AD| \tag{4.1}$$

og

$$|YX| = x\,|DC|\,. \tag{4.2}$$

Einnig eru þríhyrningarnir $\triangle DAB$ og $\triangle DYX$ eru einslaga, svo til er tala y þannig að

$$|AY| = y\,|AD| \tag{4.3}$$

og

$$|YX| = y\,|AB|\,. \tag{4.4}$$

Athugum nú að (4.1) og (4.3) gefa

$$|AD| = |AY| + |YD| = (x+y)\,|AD|$$

svo $x + y = 1$. Fáum með því að einangra x og y út úr (4.2) og (4.4) að

$$\frac{|YX|}{|DC|} + \frac{|YX|}{|AB|} = 1.$$

Þetta gefur að með $a = |AB|$ og $b = |DC|$ að

$$|YX| = \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}} = \frac{ab}{a+b}.$$

Á tilsvarandi hátt fæst að $|ZX| = \frac{ab}{a+b}$ svo að lokum fæst að

$$|YZ| = |YX| + |XZ| = \frac{2ab}{a+b}.$$

$\square$

Athugasemd. Niðurstöðuna má einnig skrifa sem

$$|YZ|^{-1} = \frac{a^{-1} + b^{-1}}{2},$$

það er að $|YZ|$ er *þýtt meðaltal* a og b.

Dæmi 5
Við Línugötu eru n hús númeruð frá 1 til n og í hverju húsi eru kveikt ljós. Á hverjum degi í n daga ætlar álfur til byggða. Ef álfur kemur á degi i þá fiktar hann í ljósrofa allra húsa með húsnúmer deilanlegt með i, svo ef það var kveikt er slökkt eftirá og öfugt. Eftir n daga er enn kveikt á ljósum í öllum húsum nema í því fyrsta, því sumir álfar slepptu því að koma til byggða til að lágmarka ummerki. Hvaða daga komu álfar til byggða?

Lausn
Sýnum eftirfarandi: Álfar koma þá daga k sem hafa þann eiginleika að engin ferningstala önnur en 1 gengur upp í k, það er að k sé *ferningsfrjáls*.

Við sjáum að eina leiðin til að slökkva á fyrsta húsinu er að láta álf mæta fyrsta daginn, svo þetta er satt fyrir $k = 1$. Við beitum nú sönnun með mótsögn, þ.e. g.r.f. að $k > 1$ sé fyrsta talan sem uppfyllir ekki það sem við viljum sýna. Smíða má deila k með því að fyrir hvern frumþátt p í k, velja eitthvað veldi af p sem er í mesta lagi jafn hátt og í k, og svo margfalda saman. Ef við viljum búa til ferningsfrjálsan frumþátt má þetta veldi aldrei vera 2 eða hærra. Því fyrir hvern frumþátt getum við valið veldið 0 eða 1. Þar með ef k hefur s ólíka frumþætti eru 2^s ferningsfrjálsir deilar i k. Þar sem k er minnsta talan sem niðurstaðan okkar gildir ekki um, þá gildir hún fyrir allar tölur minni en k. Athugum líka að enginn álfur getur mætt í hús k eftir dag k. Skiptum nú í tvö tilfelli. Ef k er ekki ferningsfrjáls eru allir ferningsfrjálsu deilar hennar minni en k, svo 2^s álfar eru búnir að mæta í húsið, sem er slétt tala. Þar sem niðurstaðan gildir ekki um k mætir álfur á degi k og slekkur ljósið, sem gengur ekki. Því fæst mótsögn. Ef k er ferningsfrjáls eru allir ferningsfrjálsu deilar hennar nema hún sjálf minni en k, svo $2^s - 1$ álfar eru búnir að mæta í húsið, sem er odda tala. Þar sem niðurstaðan gildir ekki um k mætir ekki álfur á degi k til að kveikja ljósið, sem gengur ekki. Því fæst mótsögn. Í báðum tilfellum fæst mótsögn, svo forsendan getur ekki verið sönn. Því er ekki til slíkt k sem uppfyllir ekki niðurstöðuna, svo niðurstaðan verður að vera sönn fyrir öll k. $\square$

Dæmi 6
Látum $\mathbb{N}$ vera náttúrlegu tölurnar, 0 þar með talin. Festum $k \in \mathbb{N}$. Finnið öll föll $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ þannig að

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3k \tag{6.1}$$

fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. (Hlutstig eru gefin fyrir að leysa jöfnuna fyrir tiltekið k).

Lausn 1
Tökum eitthvað fast $n \in \mathbb{N}$. Skilgreinum nú rununa $(a_s)_{s\in\mathbb{N}}$ þannig að

$$a_0 = n \quad \text{og} \quad a_{s+1} = f(a_s) \text{ fyrir öll } s \in \mathbb{N}. \tag{6.2}$$

Setjum a_s inn fyrir n í jöfnu (6.1). Þá fæst

$$f(f(a_s)) + f(a_s) = 2a_s + 3k$$

sem jafngildir

$$a_{s+2} + a_{s+1} = 2a_s + 3k. \tag{6.3}$$

Þetta eru línuleg rakningarvensl í breytunni s. Það er vel þekkt hvernig má leysa slík vensl. Þeir sem þekkja það ekki geta skoðað greinina “Linear recurrence with constant coefficients“ á Wikipediu eða fundið hefti um það á stæ.is/stak undir ýmis fróðleikur. Fyrir þá sem þekkja þetta ekki má sjá lausn 2.

Við byrjum því á að leysa óhliðruðu jöfnuna, sem hefur kennimargliðu $\lambda^2 + \lambda - 2$. Óhliðraða lausnin er því á forminu $\alpha \cdot (-2)^s + \beta \cdot 1^s$ fyrir einhver α, β. Sjáum líka með innsetningu að $s \cdot k$ sé lausn á hliðruðu jöfnunni. Þar með er $a_s = \alpha(-2)^s + \beta + sk$ fyrir einhver α, β.

Sjáum nú að ef $\alpha \neq 0$ verður $a_s < 0$ fyrir nógu stórt s, sem gengur ekki því f tekur gildi í $\mathbb{N}$. Því er $\alpha = 0$. Stingum inn $s = 0$ og fáum þá $n = a_0 = \beta$, svo $\beta = n$. Þar með er $a_s = n + sk$, svo $s = 1$ gefur $f(n) = a_1 = n + k$. Stingum þessu inn og sjáum að þetta sé lausn, og er því eina lausnin. $\square$

Lausn 2
Þar sem $f(f(n)) \in \mathbb{N}$ er $f(n) \leq 2n + 3k$. Segjum nú að við vitum að

$f(n) \leq an + b$ fyrir einhver a, b og sjáum hvernig við getum smíðað nýtt mat. Stingum inn $f(n)$ í stað n og fáum $f(f(n)) \leq af(n) + b$. Stingum upphaflegu formúluna inn og fáum $2n + 3k - f(n) \leq af(n) + b$. Ef við gerum bæði þessi skref aftur og endurritum fáum við loks

$$f(n) \leq \frac{2(a+1)}{a+3}n + \frac{3ak+b}{a+3}$$

Skilgreinum því runur $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ og $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ með $a_0 = 2$, $b_0 = 3$, $a_{i+1} = 2(a_i+1)/(a_i+3)$ og $b_{i+1} = (3ka_i+b_i)/(a_i+3)$. Samkvæmt rökunum að ofan er þá $f(n) \leq a_i n + b_i$ fyrir öll i, svo finnum nú formúlur fyrir a_i, b_i.

Með því að reikna nokkur gildi af a_i er hægt að giska á formúluna

$$a_i = \frac{4^{i+1}+2}{4^{i+1}-1}$$

Sanna má að þessi formúla sé rétt með þrepun, hún gildir fyrir $i = 0$ og þrepunarskrefið fæst einfaldlega með innsetningu.

Með því að reikna upp úr kíkissummum sem fást við innsetningu á a_i og b_{i-1} fæst að

$$b_i = \frac{4^{i+1}+6i-4}{4^{i+1}-1}k + \frac{9}{4^{i+1}-1}$$

Nú sést að fyrir nógu stór i verður a_i eins nálægt 1 og við þurfum, og b_i eins nálægt k og við þurfum. Þar sem $f(n)$ er heiltala og $f(n) \leq a_i n + b_i$ fyrir öll i, er þá til nógu stórt i til að neyða $f(n) \leq n + k$.

Stingum inn $f(n)$ í stað n og fáum $f(f(n)) \leq f(n) + k$ sem gefur $2n + 3k \leq 2f(n) + k$, svo að $n + k \leq f(n)$. Þar með er $f(n) = n + k$, sem við sjáum að er lausn með innsetningu. $\square$